1 Marche de Gröbner

On suppose que nous avons une base de Gröbner marquée G_{old} pour un ordre $<_{M_{old}}$ et on cherche à calculer la base de Gröbner marquée pour un ordre $<_{M_t}$. On va alors se déplacer dans l'éventail de Gröbner, de la première ligne w_{old} de M_{old} vers la première ligne w_t de M_t. On cherche à savoir comment la base change lorsqu'on passe d'un cône de l'éventail à l'autre.

1.1 Calcul du dernier point dans le cône $C_{G_{old}}$.

Soit le segment de ligne reliant w_{old} et w_t : $(1-u)w_{old} + uw_t$ pour $u \in [0,1]$. On cherche à trouver le dernier point sur cette ligne à l'intérieur du cône $C_{G_{old}}$. On note ce point w_{new}. Soit $G_{old} = \{x^{\alpha(i)} + \sum_{i,\beta} c_{i,\beta} x^{\beta} : 1 \leq i \leq t\}$, où pout tout i, $x^{\alpha(i)}$ est le terme dominant par rapport à l'ordre $>_{M_{old}}$. On note $v_1, \ldots, v_m$ les vecteurs $\alpha(i) - \beta$, pour tout $1 \leq u \leq t$ et $c_{i,\beta} \neq 0$. Alors, w_{new} est le vecteur

$$w_{new} = (1 - u_{last})w_{old} + u_{last} w_t,$$

où u_{last} est calculé par l'algorithme suivant :

Algorithm 1

Require: w_{old}, w_t, $v_1, \ldots, v_m$
Ensure: u_{last}

```
u_last ← 1
for j = 1, ... m do
    if w_t · v_j < 0 then u_j ← (w_old · v_j) / (w_old · v_j − w_t · v_j)
        if u_j < u_last then u_last ← u_j
        end if
    end if
end for
```

L'idée dernier cet algorithme est que le point $(1-u)w_{old} + uw_t$ est dans $C_{G_{old}}$ si et seulement si

$$(1-u)(w_{old} \cdot v_j) + u(w_t \cdot v_j) \geq 0, \quad 1 \leq j \leq m. \tag{1}$$

Si $w_t \cdot v_j \geq 0$ alors (1) est vraie pour tout $u \in [0,1]$. De l'autre côté, si $w_t \cdot v_j < 0$, alors u_j nous donne la plus grande valeur de u tel que (1) est vraie pour ce j particulier car $(1-u_j)(w_{old} \cdot v_j) + u_j(w_t \cdot v_j) = 0$.

1.2 Rappel sur la notion w-poids

Soit $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n_+$ et soit $t = ax_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ un terme dans $k[x_1, \ldots, x_n]$. Le w-poids de t est donné par

$$i_1 \cdot w_1 + \cdots + i_n \cdot w_n.$$

Pour un polynôme $f \neq 0$ on définit $in_w(f)$ comme étant la somme des termes de f de w-poids maximal.

2 Exercice 14.3.1

Soit

$$I = \langle x^2 + y^2 - 1, x + 2y \rangle.$$

Effectuer une marche de Gröbner pour convertir la base de Gröbner marquée pour l'ordre *lex* avec $x > y$ en celle pour l'ordre *lex* avec $y > x$.

Correction. La base de Gröbner marquée de I pour l'ordre *lex* sera notée G_{old} :

$$G_{old} = \{\underline{x} + 2y, \underline{y^2} - \frac{1}{5}\}$$

On note :

- $M_{old} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice correspondant à l'ordre *lex* avec $x > y$.
- $M_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice correspondant à l'ordre *lex*, avec $y > x$.
- $w_{old} = (1, 0)$ (resp. $w_t = (0, 1)$), la première ligne de M_{old} (resp. de M_t).

On peut remarquer ici que la matrice M_{old} donne le même ordre que la matrice $\begin{pmatrix} w_{old} \\ M_t \end{pmatrix}$.

1. On utilise maintenant l'algorithme 1 pour calculer le dernier point dans le cône $C_{G_{old}}$:
   - $(\underline{x} + 2y) \Rightarrow v_1 = (1, 0) - (0, 1) = (1, -1) \Rightarrow v_1 \cdot w_t = (1, -1)(0, 1) = -1 < 0$.
   - $(\underline{y^2} - \frac{1}{5}) \Rightarrow v_2 = (0, 2) - (0, 0) = (0, 2) \Rightarrow v_2 \cdot w_t = (0, 2)(0, 1) = 2 > 0$.

   Pour $j = 1$, et puisque $w_{old} \cdot v_1 = (1, 0) \cdot (1, -1) = 1$, on obtient $u_1 = \frac{w_{old} \cdot v_1}{w_{old} \cdot v_1 - w_t \cdot v_1} = \frac{1}{2}$.

   Par conséquent, $w_{new} = (1 - u_{last}) w_{old} + u_{last} w_t = \frac{1}{2} w_{old} + \frac{1}{2} w_t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
2. On calcule maintenant l'ensemble $in_{w_{new}}(G_{old}) = in_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x + 2y, y^2 - \frac{1}{5}) = (x + 2y, y^2)$.
3. On calcule la base de Gröbner de l'idéal généré par $in_{w_{new}}(G_{old})$, H, pour l'ordre donné par $\begin{pmatrix} w_{new} \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

   $$H = \{y + \frac{1}{2}x, x^2\}.$$
4. On écrit chaque polynôme h_j dans H comme

   $$h_j = \sum_{g \in G_{old}} P_{j,g} \cdot in_{w_{new}}(g).$$

   De cette façon on obtient que
   - $y + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \cdot (x + 2y) + 0 \cdot (y^2)$
   - $x^2 = (x - 2y) \cdot (x + 2y) + 4 \cdot (y^2)$

On calcule maintenant pour tout j :

$$\overline{h_j} = \sum_{g \in G_{old}} P_{j,g} \cdot g,$$

ce que nous donne

- $\overline{h_1} = \frac{1}{2} \cdot (x + 2y) + 0 \cdot (y^2 - \frac{1}{5}) = \frac{1}{2}x + y$

- $\overline{h_2} = (x - 2y) \cdot (x + 2y) + 4 \cdot (y^2 - \frac{1}{5}) = x^2 - \frac{4}{5}$

On note $G_{new} = \{y + \frac{1}{2}x, x^2 - \frac{4}{5}\}$ qui est une base de Gröbner pour $<_{M_{new}}$. On vérifie que G_{new} est G_t et que donc la conversion est réussie.

3 Exercice 14.3.2

Soit

$$I = \langle x^3 - y, x + y^3 + 1 \rangle.$$

Effectuer une marche de Gröbner pour convertir la base de Gröbner marquée pour l'ordre *lex* avec $x > y$ en celle pour l'ordre *lex* avec $y > x$.

Correction. La base de Gröbner marquée de I pour l'ordre *lex* sera notée G_{old} :

$$G_{old} = \{\underline{x} + y^3 + 1, \underline{y^9} + 3y^6 + 3y^3 + y + 1\}$$

On note :

- $M_{old} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice correspondant à l'ordre *lex* avec $x > y$.
- $M_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice correspondant à l'ordre *lex*, avec $y > x$.
- $w_{old} = (1, 0)$ (resp. $w_t = (0, 1)$), la première ligne de M_{old} (resp. de M_t).

On peut remarquer ici que la matrice M_{old} donne le même ordre que la matrice $\begin{pmatrix} w_{old} \\ M_t \end{pmatrix}$.

1. On utilise l'algorithme 1 pour calculer le dernier point dans le cône $C_{G_{old}}$. Le seul v_j intéressant est le suivant :

   - $(\underline{x} + y^3 + 1) \Rightarrow v_1 = (1, 0) - (0, 3) = (1, -3) \Rightarrow v_1 \cdot w_t = (1, -3)(0, 1) = -3 < 0.$

   Puisque $w_{old} \cdot v_1 = (1, 0) \cdot (1, -3) = 1$, on obtient $u_1 = \frac{w_{old} \cdot v_1}{w_{old} \cdot v_1 - w_t \cdot v_1} = \frac{1}{4}$.
   On pose $u_{last} = u_1$.
   Par conséquent, $w_{new} = (1 - u_{last})w_{old} + u_{last}w_t = \frac{3}{4}w_{old} + \frac{1}{4}w_t = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.

2. On calcule maintenant l'ensemble $in_{w_{new}}(G_{old}) = in_{(\frac{3}{4},\frac{1}{4})}(x + y^3, y^9 + 3y^6 + 3y^3 + y + 1) = (x + y^3, y^9)$.

3. On calcule la base de Gröbner de l'idéal généré par $in_{w_{new}}(G_{old})$, H, pour l'ordre donné par $\begin{pmatrix} w_{new} \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:
$$H = \{y^3 + x, x^3\}.$$

4. On écrit chaque polynôme h_j dans H comme
$$h_j = \sum_{g \in G_{old}} P_{j,g} \cdot in_{w_{new}}(g).$$
De cette façon on obtient que
   - $y^3 + x = 1 \cdot (x + y^3) + 0 \cdot (y^9)$
   - $x^3 = (y^6 - xy^3 + x^2) \cdot (x + y^3) + (-1) \cdot (y^9)$
     On peut calculer les coefficients $P_{j,g}$ avec Sage. Par exemple pour ce calcule on fait :
     ```
     A.<x,y> = PolynomialRing(QQ, order = matrix(2,[3, 1, 0, 1]))
     I = A.ideal(x+y^3, y^9)
     f = x^3
     f.lift(I.gens())
     ```

   On calcule maintenant pour tout j :
$$\overline{h_j} = \sum_{g \in G_{old}} P_{j,g} \cdot g,$$
   ce que nous donne
   - $\overline{h_1} = 1 \cdot (x + y^3 + 1) + 0 \cdot (y^9 + 3y^6 + 3y^3 + y + 1) = x + y^3 + 1$
   - $\overline{h_2} = (y^6 - xy^3 + x^2) \cdot (x + y^3 + 1) + (-1) \cdot (y^9 + 3y^6 + 3y^3 + y + 1) = x^3 - 2y^6 - xy^3 + x^2 - 3y^3 - y - 1$

   On réduit la base $\{x + y^3 + 1, x^3 - 2y^6 - xy^3 + x^2 - 3y^3 - y - 1\}$ pour obtenir $G_{new} = \{x^3 - y, y^3 + x + 1\}$ qui est une base de Gröbner pour $<_{M_{new}}$. Pour cela on peut utiliser Sage :
   ```
   A.<x,y> = PolynomialRing(QQ, order = matrix(2,[3, 1, 0, 1]))
   I = A.ideal(x + y^3 + 1, x^3 - 2*y^6 - x*y^3 + x^2 - 3*y^3 - y - 1)
   I.interreduced_basis()
   ```

   On peut vérifier que la base que nous venons de calculer est la base de I pour l'ordre *deglex* avec $x > y$.

   On pose maintenant $M_{old} = M_{new} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G_{old} = G_{new} = \{x^3 - y, y^3 + x + 1\}$ et on mets à jour w_{new} en appliquant l'algorithme 1 à $w_{new} = (3, 1)$ et $w_t = (0, 1)$.

5. - $(\underline{x^3} - y) \Rightarrow v_1 = (3, 0) - (0, 1) = (3, -1) \Rightarrow v_1 \cdot w_t = (3, -1)(0, 1) = -1 < 0.$

- $(\underline{y^3} + x) \Rightarrow v_2 = (0,3) - (1,0) = (-1,3) \Rightarrow v_1 \cdot w_t = (-1,3)(0,1) = 3 > 0$.
- $(\underline{y^3} + 1) \Rightarrow v_2 = (0,3) - (0,0) = (0,3) \Rightarrow v_1 \cdot w_t = (0,3)(0,1) = 3 > 0$.

  Seul v_1 est donc intéressant. Puisque $w_{old} \cdot v_1 = (3,1) \cdot (3,-1) = 8$, on obtient $u_1 = \frac{w_{old} \cdot v_1}{w_{old} \cdot v_1 - w_t \cdot v_1} = \frac{8}{9}$.

On pose $u_{last} = u_1$.

Par conséquent, $w_{new} = (1 - u_{last}) w_{old} + u_{last} w_t = \frac{1}{9} w_{old} + \frac{8}{9} w_t = (\frac{1}{3}, 1)$. On pose $M_{new} = \begin{pmatrix} w_{new} \\ M_t \end{pmatrix}$ qui donne le même ordre que la matrice carrée $M_{new} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. On calcule l'ensemble $in_{w_{new}}(G_{old}) = in_{(1,3)}(x^3 - y, y^3 + x + 1) = (x^3 - y, y^3)$.
7. On calcule la base de Gröbner de l'idéal généré par $in_{w_{new}}(G_{old})$, H, pour l'ordre donné par $M_{new} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:
$$H = \{x^9, y - x^3\}.$$
8. On écrit chaque polynôme h_j dans H comme
$$h_j = \sum_{g \in G_{old}} P_{j,g} \cdot in_{w_{new}}(g).$$
De cette façon on obtient que
   - $x^9 = (y^2 + x^3 y + x^6) \cdot (x^3 - y) + 1 \cdot (y^3)$
   - $y - x^3 = (-1) \cdot (x^3 - y) + 0 \cdot (y^3)$

   On calcule maintenant pour tout j :$\overline{h_j} = \sum_{g \in G_{old}} P_{j,g} \cdot g$, ce que nous donne
   - $\overline{h_1} = (y^2 + x^3 y + x^6) \cdot (x^3 - y) + 1 \cdot (y^3 + x + 1) = x^9 + x + 1$
   - $\overline{h_2} = (-1) \cdot (x^3 - y) + 0 \cdot (y^3 + x + 1) = y - x^3$

   Ici la base est déjà réduite. On note donc $G_{new} = \{y - x^3, x^9 + x + 1\}$ et on voit qu'elle correspond à la base de Gröbner de I pour l'ordre *lex* avec $y > x$. La transformation est donc terminée.