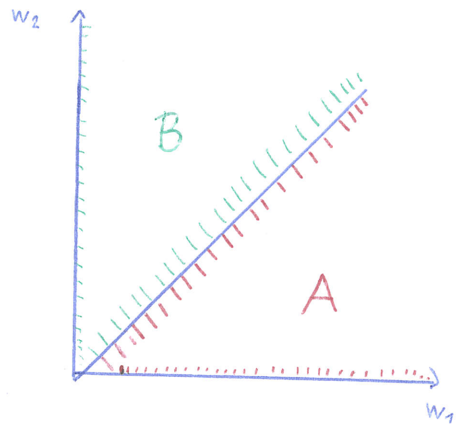
Exercice 14.1

1. $I = \langle x^2+y^2-1,\ x+2y \rangle$

Pour décrire l'éventail de Gröbner, on commence par choisir un ordre monomial et calculer son cône de Gröbner.

▲ On commence par l'ordre lex avec $x > y$

Base de Gröbner $\quad G = \{ \underline{x}+2y,\ \underline{y^2}-\frac{1}{5} \}$



Soit $w = (w_1, w_2)$

- $x+2y \Rightarrow w[(1,0)-(0,1)] \geq 0 \Rightarrow \boxed{w_1 - w_2 \geq 0}$
- $y^2-\frac{1}{5} \Rightarrow w[(0,2)-(0,0)] \geq 0 \Rightarrow \boxed{2w_2 \geq 0}$

La région A correspond au cône G_G.

▲ On choisit maintenant un ordre monomial dont la première ligne w de M (pour l'ordre matriciel $<_M$ correspondant) ne soit pas un point de A.

Si on prend l'ordre lex, avec $y > x$, la matrice M correspondante est la $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont la première ligne n'est pas dans A.

On calcule la base de Gröbner :

Base de Gröbner $\quad G = \{ \underline{y}+\frac{1}{2}x,\ \underline{x^2}-\frac{4}{5} \}$

Soit $w = (w_1, w_2)$

- $y+\frac{1}{2}x \Rightarrow w[(0,1)-(1,0)] \geq 0 \Rightarrow \boxed{-w_1+w_2 \geq 0}$
- $x^2-\frac{4}{5} \Rightarrow w[(2,0)-(0,0)] \geq 0 \Rightarrow \boxed{2w_1 \geq 0}$

Ceci correspond à la région B.

Comme A et B couvrent tout l'espace on a fini.

---

2. $I = \langle x^3-y,\ x+y^3+1 \rangle$

▲ Ordre lex avec $x > y$

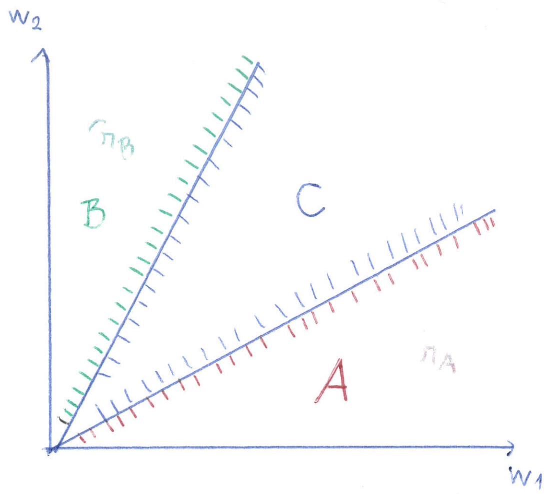
Base de Gröbner

$$G_A = \{ \underline{x} + y^3 + 1, \ \underline{y^9} + 3y^6 + 3y^3 + y + 1 \}$$

La seule inégalité utile est la suivante :

$$x + y^3 \Rightarrow w[(1,0) - (0,3)] \geq 0 \Rightarrow w_1 - 3w_2 \geq 0$$

Ça correspond à la région A.



▲ Ordre lex avec $y > x$.

Base de Gröbner

$$G_B = \{ \underline{y} - x^3, \ \underline{x^9} + x + 1 \}$$

Seule inégalité utile :

$$y - x^3 \Rightarrow w[(0,1) - (3,0)] \geq 0 \Rightarrow -3w_1 + w_2 \geq 0$$

▲ On choisit maintenant l'ordre deglex avec $x > y$ qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont la première ligne n'est ni dans A ni dans B.

Base de Gröbner

$$G_C = \{ \underline{x^3} - y, \ \underline{y^3} + x + 1 \}$$

- $x^3 - y \Rightarrow w[(3,0) - (0,1)] \geq 0 \Rightarrow 3w_1 - w_2 \geq 0$
- $y^3 + x \Rightarrow w[(0,3) - (1,0)] \geq 0 \Rightarrow -w_1 + 3w_2 \geq 0$

Comme A, B et C couvrent toute la région, on a fini.

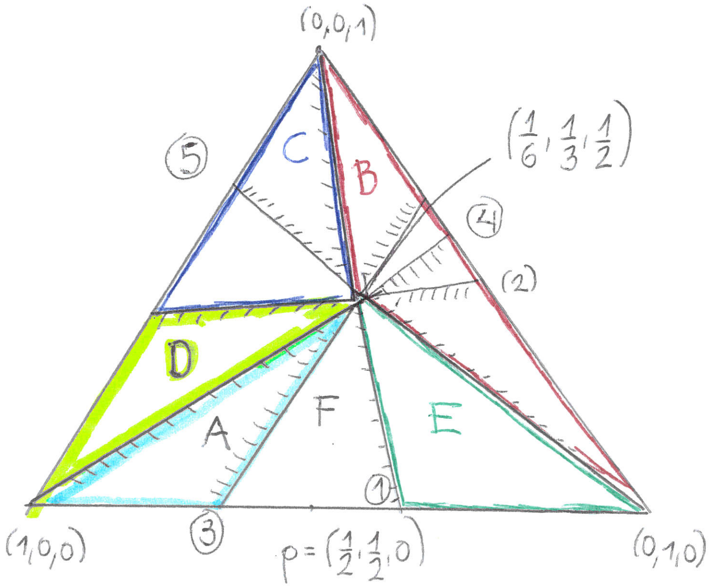
4. $I = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$

On suit la même strategie. On construit les cônes de l'éventail un par un, en choisissant un ordre monomial différent chaque fois.

A lex, $x > y > z$

Base de Gröbner : $G_A = \{\underline{x^2} - y, \underline{xy} - z, \underline{xz} - y^2, \underline{y^3} - z^2\}$

Soit $w = (w_1, w_2, w_3)$



Inégalités :

$x^2 - y$: $2w_1 - w_2 \geq 0$ (1)

$xy - z$: $w_1 + w_2 - w_3 \geq 0$ (2)

$xz - y^2$: $w_1 - 2w_2 + w_3 \geq 0$ (3)

$y^3 - z^2$: $3w_2 - 2w_3 \geq 0$ (4)

B lex, $z > y > x$

Base de Gröbner $G_B = \{\underline{z} - x^3, \underline{y} - x^2\}$

Inégalités :

$z - x^3$: $-3w_1 + w_3 \geq 0$ (5)

$y - x^2$: $-2w_1 + w_2 \geq 0$ (-1)

C lex, $z > x > y$

Base de Gröbner $G_C = \{\underline{z} - xy, \underline{x^2} - y\}$

Inégalités :

$z - xy$: $-w_1 - w_2 + w_3 \geq 0$ (-2)

$x^2 - y$: $2w_1 - w_2 \geq 0$ (1)

D lex, $x > z > y$

Base de Gröbner $G_D = \{\underline{x^2} - y, \underline{xz} - y^2, \underline{z^2} - y^3, \underline{xy} - z\}$

Inégalités

$x^2 - y$: $2w_1 - w_2 \geq 0$ (1)

$xz - y^2$: $w_1 + w_3 - 2w_2 \geq 0$ (3)

$z^2 - y^3$: $2w_3 - 3w_2 \geq 0$ (-4)

$xy - z$: $w_1 + w_2 - w_3 \geq 0$ (2)

$\underline{\underline{E}}$ ordre lex, $y > x > z$

Base de Gröbner $G_E = \{\underline{y} - x^2, \underline{x^3} - z\}$

Inégalités : $y - x^2$: $-2w_1 + w_2 \geq 0$ (-1)

$x^3 - z$: $3w_1 - w_3 \geq 0$ (-5)

Une fois les cônes A, B, C, D et E trouvés, notre stratégie heuristique d'utiliser les ordres lex avec les x, y, z ordonnés de diverses façons ne nous donne plus de nouveau cône, car la première ligne des matrices de ces ordres est $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ou $(0,0,1)$ et ces trois vecteurs ne se trouvent pas dans la région hors de A, B, C, D et E.

De même on ne peut pas utiliser deglex ou degrevlex, car $(1,1,1)$ n'est pas dans la région restante. On doit donc construire un ordre matriciel dont la première ligne est dans la région restante. On choisit arbitrairement $(1,1,0)$ qui correspond au point p sur l'image (en fait, $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ mais on peut multiplier par un scalaire positif)

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ définit un ordre matriciel $<_M$ (car ses lignes sont positives et linéairement indépendantes). On calcule son cône de Gröbner.

$\underline{\underline{F}}$ ordre $<_M$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Base de Gröbner $G_F = \{\underline{y^2} - xz, \underline{xy} - z, \underline{x^2} - y\}$

Inégalités : $-w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 0$ (-3)

$w_1 + w_2 - w_3 \geq 0$ (2)

$2w_1 - w_2 \geq 0$ (1)

On voit donc qu'avec A, B, C, D, E et F on a couvert tout $\mathbb{R}^3_+$.