

Examen – Session 1

Analyse d'Algorithmes et Programmation

30 avril 2018

Durée : 2 heures

Les seuls documents autorisés sont les notes de cours.

L'utilisation d'un appareil électronique est proscrit pendant toute la durée de l'épreuve.

Le barème est indicatif.

Exercice 1 — Tri et arbre

[2 points]

Question 1.1 [1 point]

Donner un algorithme pour trier une liste de nombres qui utilise un arbre binaire de recherche.

Question 1.2 [1 point]

Quel est le temps d'exécution de votre algorithme ? Comparer avec les autres algorithmes de tri connus.

Exercice 2 — Arbres binaires de recherche

[4.5 points]

Question 2.1 [1 point]

Soit T un arbre binaire de recherche contenant $n \geq 1$ nœuds. Donner des bornes sur la hauteur de l'arbre T .

Question 2.2 [1 point]

Réciproquement, soit T un arbre binaire de recherche de hauteur $h(T) \geq 0$. Quels sont les nombres minimaux et maximaux de nœuds contenus dans l'arbre T ?

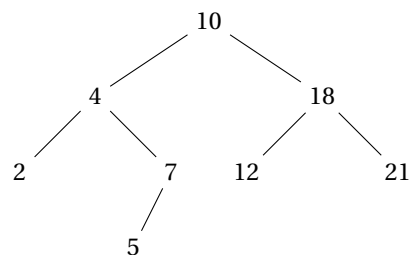
Question 2.3 [1 point]

Soit la liste de nombres suivante : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. La hauteur de l'arbre binaire de recherche construit d'après cette liste dépend de l'ordre d'insertion dans l'arbre. Donner un ordre d'insertion pour chacune des hauteurs possibles.

Question 2.4 [1.5 points]

Soit l'arbre binaire de recherche T ci-contre. Appliquez-lui **dans l'ordre** les instructions suivantes et retournez le résultat.

- INSERER($T, 14$)
- SUPPRIMER($T, 18$)
- INSERER($T, 19$)
- INSERER($T, 9$)
- INSERER($T, 8$)
- SUPPRIMER($T, 7$)
- SUPPRIMER($T, 10$)



Exercice 3 — Table de hachage**[3.5 points]**

J'ai à représenter un sous-ensemble de 17 éléments de $\{0, \dots, 50\}$. J'aimerais utiliser une table à adressage direct mais je n'ai à disposition qu'une table à 11 entrées $T[0, \dots, 10]$.

Question 3.1 [1 point]

Expliquer en quoi l'adressage direct est impossible ici.

Question 3.2 [1 point]

Je vais donc utiliser une fonction de hachage de la forme $h(k) = k \bmod m$. Expliquer en quoi prendre $m = 11$ est un bon choix ?

Question 3.3 [1.5 points]

Donner l'état de la table T correspondant à l'ensemble $\{46, 26, 23, 37, 48, 45, 44, 34, 1, 36, 9, 7, 3, 14, 29, 18, 24\}$, pour la fonction définie à la question précédente. Les collisions seront résolues par chaînage.

Question 3.4 [1 point]

Quel est l'élément dont la recherche a un coût maximal ? En notant c le coût d'un accès à un pointeur quel est le temps exact de cette recherche ?

Exercice 4 — Programmation dynamique**[3 points]****Question 4.1** [1.5 points]

Modifier l'algorithme COUPER-BARRE-ASC pour y ajouter le prix de coupe, fixé à 1 (c'est-à-dire que chaque coupe effectuée coûte 1, à retirer du gain total). La sortie de votre algorithme doit retourner à la fois les tableaux des revenus r et des positions de coupe s .

COUPER-BARRE-ASC(p, n)

```

1:  $r = \text{tab}[0, \dots, n]$ 
2:  $r[0] = 0$ 
3: for  $j = 1$  to  $n$  do
4:    $q = -\infty$ 
5:   for  $i = 1$  to  $j$  do
6:      $q = \max(q, p[i] + r[j - i])$ 
7:   end for
8:    $r[j] = q$ 
9: end for
10: return  $r[n]$ 

```

Question 4.2 [1.5 points]

Donner la sortie de ce nouvel algorithme pour $n = 10$ et le tableau de tarifs suivant :

| | | | | | | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| longueur i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| prix p_i | 1 | 5 | 8 | 9 | 10 | 17 | 17 | 20 | 24 | 30 |

Exercice 5 — Algèbre linéaire**[3 points]****Question 5.1** [1 point]

Qu'est-ce que ω , l'exposant de l'algèbre linéaire ? Donnez-en un encadrement entre 2 entiers en expliquant votre choix.

Question 5.2 [1 point]

Donner deux valeurs précises pour ω , accompagnées du nom de l'algorithme associé.

Question 5.3 [1 point]

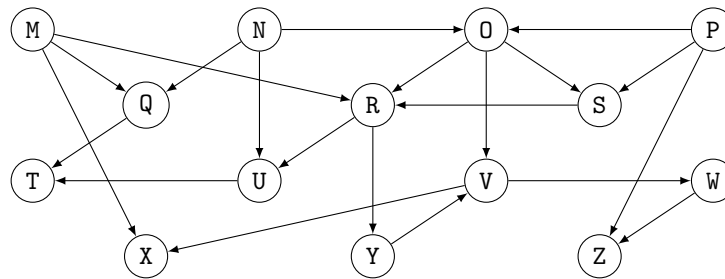
Montrer, en raisonnant dans les deux sens, que calculer le carré d'une matrice de taille $n \times n$ a aussi une complexité en $O(n^\omega)$.

Exercice 6 — Graphes

[6.5 points]

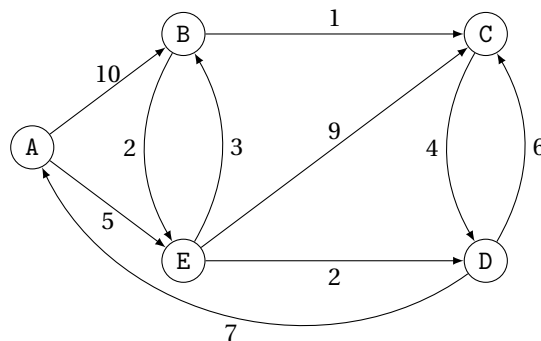
Question 6.1 [1.5 points]

Voici un graphe orienté non-pondéré. Appliquez l'algorithme de tri-topologique et retournez la liste des sommets triés. Vous ferez apparaître sous forme d'un tableau les données intermédiaires. On suppose que lorsque l'on a le choix, l'ordre lexicographique est respecté.



Question 6.2 [1 point]

Construire la matrice d'adjacence du graphe suivant :



Question 6.3 [1 point]

Quelles sont les différences entre matrices et listes d'adjacence ? Citer un cas pratique où l'un des deux choix est meilleur que l'autre.

Question 6.4 [1.5 points]

Appliquer l'algorithme de DIJKSTRA au graphe précédent et expliquer le résultat.

Question 6.5 [1.5 points]

Écrire un algorithme PLUS-COURT-CHEMIN(u, v) qui affiche les étapes d'un plus court chemin de u à v de manière lisible. On suppose que DIJKSTRA(G, u) a déjà été appliqué au graphe.