Devoir à la maison

Yann Rotella

March 13, 2021

Ce devoir est à rendre pour le 22 avril 2020. Il faudra rendre à la fois les questions théoriques, ainsi qu'un fichier .py qui contiendra les programmes demandés.

Exercice 1. Réaliser un algorithme en Python qui prend un entier n positif et renvoie $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, sans utiliser ni une fonction racine carrée ni une fonction floor. La complexité de votre algorithme doit être logarithmique en n. Prouvez la complexité de votre algorithme, ainsi que sa terminaison et son exactitude.

Exercice 2. Résolution de l'équation de Pell-Fermat.

Le but de cet exercice est de trouver les solutions (x, y) **entières** de l'équation

$$x^2 - dy^2 = 1$$

pour d qui n'est pas un carré parfait. On admettra tous les résultats énoncés ici sans preuve, le but étant d'écrire des algorithmes permettant de résoudre l'équation.

On sait que toute racine carrée peut s'écrire sous la forme d'un développement en fraction continue:

$$\sqrt{d} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}} .$$

Avec $a_i \in \mathbb{N}$, pour $i \geq 0$.

D'après le théorème de Lagrange, on sait qu'un irrationnel est quadratique (c'est à dire un irrationnel solution d'une équation du second degré à coefficients rationnels, c'est le cas des racine carrées) si et seulement si son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang. De plus, si un irrationnel quadratique est de la forme $(\alpha + \sqrt{d})/\beta$, alors les quotients a_i sont majorés par $2\sqrt{d}$ et la période est elle majorée par $2d$.

1. Calculez le développement en fraction continue de $\sqrt{6}$.

2. Il s'avère que les coefficients successifs de la fraction continue d'une racine carrée peuvent être obtenus en utilisant les formules suivantes. $a_0 = \lfloor\sqrt{d}\rfloor$, $\beta_0 = 0$ et $\gamma_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
\beta_{n+1} &= \gamma_n a_n - \beta_n \\
\gamma_{n+1} &= \frac{d^2 - \beta_{n+1}^2}{\gamma_n} \\
a_{n+1} &= \left\lfloor \frac{\sqrt{d} + \beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

3. Montrez que pour tout $n \geq 0$, β_n, γ_n et a_n sont des entiers.

4. Montrez que pour tout $n \geq 0$,
$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{\lfloor\sqrt{d}\rfloor + \beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}} \right\rfloor$$

5. Proposez alors un algorithme qui calcule le développement en fraction continue de n'importe quelle racine carrée, toujours sans utiliser de fonction sqrt ou floor de python. (Il faut cependant faire appel à l'exercice 1). On utilisera une mémoire pour les valeurs successives a_n, β_n et γ_n pour détecter la période présente dans la fraction continue.

6. Évaluez la complexité de votre algorithme, en mémoire et en temps.

Pour une racine carrée, la suite est périodique à partir du rang 1. En d'autre termes, on a
$$\sqrt{d} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p, a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots] .$$
Il a aussi été montré que $a_p = 2\lfloor\sqrt{d}\rfloor$. Et que tous les autres a_i pour i qui n'est pas un multiple de p sont différents de $2\lfloor\sqrt{d}\rfloor$. Réécrivez un deuxieme programme (en copiant le précédent et en le modifiant) pour prendre en compte ceci et ne plus utiliser de mémoire.

Il s'avère de plus que, selon la parité de la période p, les solutions entières de l'équation de Pell-Fermat sont obtenues avec les réduites de $\sqrt{d}$, c'est à dire la fraction continue tronquée ou bien à $p-1$ si p est pair et $2p-1$ si p est impair. Le quotients et le dénominateur ainsi obtenus permettent de donner une solution à l'équation de Pell-Fermat. Enfin, les autres solutions $k \geq 1$ peuvent être trouvées en identifiant $x_k + y_k\sqrt{d}$ avec le développement de $(x_1 + y_1\sqrt{d})^k$.

1. Donner la relation de récurrence pour la suite de (x_k, y_k).

2. Enfin, écrire un programme qui calcule les premières solutions entières d'une équation de Pell-Fermat.

3. Finalement, nos programmes nous permettent de calculer des très bonnes approximations des racines carrées en utilisant uniquement des entiers. Les solutions de l'équation de Pell-Fermat forment donc des approximations de $\sqrt{d}$. Évaluez l'erreur d'approximation faite par un couple

d'entiers, solutions de l'équation de Pell-Fermat. Reprenez votre programme, et évaluez jusqu'à combien de chiffre significatifs vous pouvez avoir une approximation de $\sqrt{d}$. (Indication, cela dépend de la valeur du dénominateur du rationnel qui approxime $\sqrt{d}$).

Exercice 3, bonus sur les graphes. Programmez un algorithme qui prend en entrée un graphe non orienté et renvoie si oui ou non le graphe est biparti (ou de manière équivalente, à deux couleurs).